

問いと図で確かめる

実数の見取り図

分数で表せる数と表せない数を区別し、正確な値と近似値の違いを確かめます。

問題 1

一辺が1の正方形の対角線は、分数で正確に表せますか。電卓の1.414は正確な値ですか、近似値ですか。

01

一辺1の正方形の
対角線

02

分数で正確に
表せる？

03

1.414は
正確？近似？

問題 2

$\sqrt{2}$ と1.4、1.5の大小関係を、2乗して比べましょう（正の数の範囲）。

01

$\sqrt{2}$ はどこ？

02

1.4と1.5を二乗

03

正の数で比較

問題 3

有限小数1.414は、有理数ですか、無理数ですか。末尾に「…」を付けない小数として考えます。

01

有限小数1.414

02

分数で表せる？

解答と理由

実数の見取り図

問題 1 の解答

対角線は $\sqrt{2}$ 。 $\sqrt{2}$ は無理数なので、分数で正確には表せません。1.414は $\sqrt{2}$ の近似値です。

正方形の対角線を2乗すると2です。正確な値 $\sqrt{2}$ と有限小数1.414は異なり、 $\sqrt{2} \neq 1.414$ です。

01

有理数と無理数で
実数

02

$\sqrt{2}$ は無理数

03

二乗で数直線上の
位置を絞る

問題 2 の解答

$$1.4 < \sqrt{2} < 1.5$$

$1.4^2 = 1.96 < 2 < 2.25 = 1.5^2$ 。正の数では、2乗した値の大小関係から元の数の大小を比べられます。

01

$$1.4^2 = 1.96 < 2$$

02

$$2 < 2.25 = 1.5^2$$

03

$$1.4 < \sqrt{2} < 1.5$$

問題 3 の解答

有理数です。 $1.414 = 1414/1000 = 707/500$

分母が0でない整数の比に書けるため、有理数です。 $\sqrt{2}$ の近似に使う数でも、 $\sqrt{2}$ そのものではありません。

01

$$1.414 = 1414/1000$$

02

$$707/500$$

03

有限小数は有理数

要点と解説をつなぐ

実数の見取り図

有理数と無理数

有理数は整数の比で表せる数です（分母 $\neq 0$ ）。 $3=3/1$ 、 $0.25=25/100=1/4$ 、 $1/3=0.333\cdots$ はいずれも有理数です。無限に続く小数でも、循環小数なら有理数です。

$\sqrt{2}$ が分数にならない理由

$\sqrt{2}=b/a$ を既約な分数と仮定します。 $b^2=2a^2$ より b は偶数です。 $b=2k$ とすると $a^2=2k^2$ となり、 a も偶数です。 a と b がともに偶数では既約という仮定に矛盾します。

正確な値と近似値

$\sqrt{2}$ は正確な値、1.414は近似値です。さらに $1.41^2=1.9881$ 、 $1.42^2=2.0164$ から、 $1.41<\sqrt{2}<1.42$ と位置を絞れます。桁を増やす計算と、無理数であることの証明は別です。

見た目ではなく値で分類

$0=0/1$ 、 $\sqrt{4}=2=2/1$ は有理数です。 $-\sqrt{2}$ は無理数で、正負と有理・無理の分類は別です。 $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$ のように、無理数どうしの和が有理数になる場合もあります。

要点

実数は有理数と無理数を合わせた集合です。同じ数が両方に入ることはありません。記号の見た目ではなく、整数の比で表せる値かを確認めます。

01

$$b=2k \Rightarrow a^2=2k^2$$

02

a も偶数

03

既約と矛盾