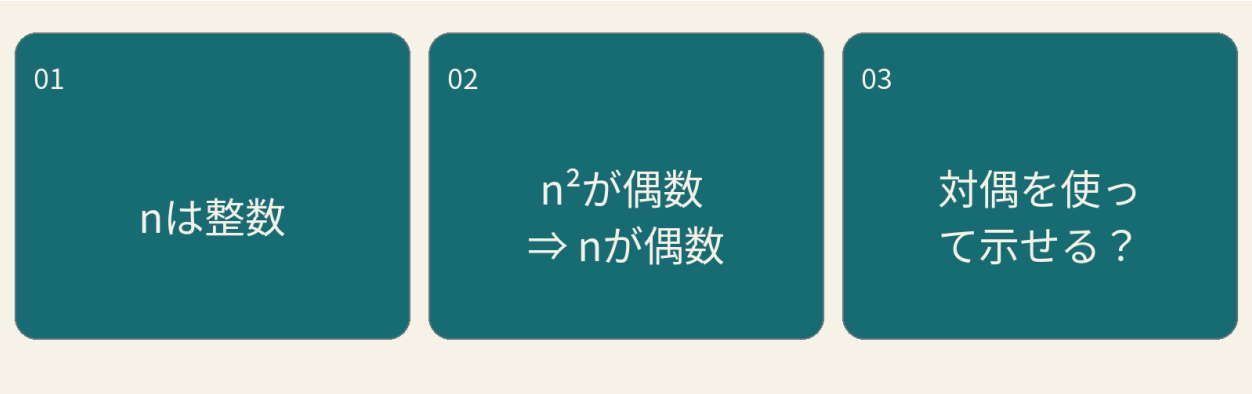
問いと図で確かめる

対偶による証明

条件と数値は図・表示の記録にそろえています。問題、解答、続く理由を対応させて確かめます。

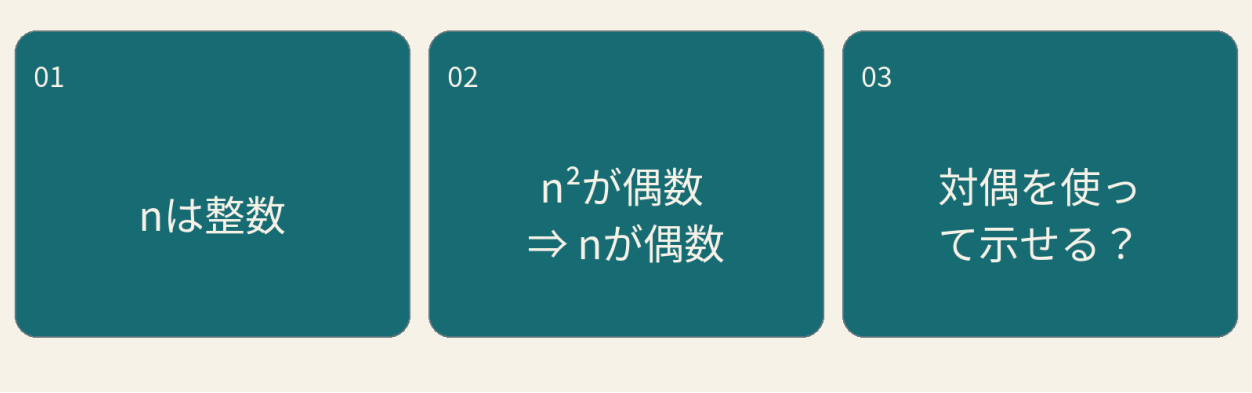
問題 1

直接示しにくい命題は対偶から示せる？。nは整数。n^2が偶数 ⇒ nが偶数。対偶を使って示せる？



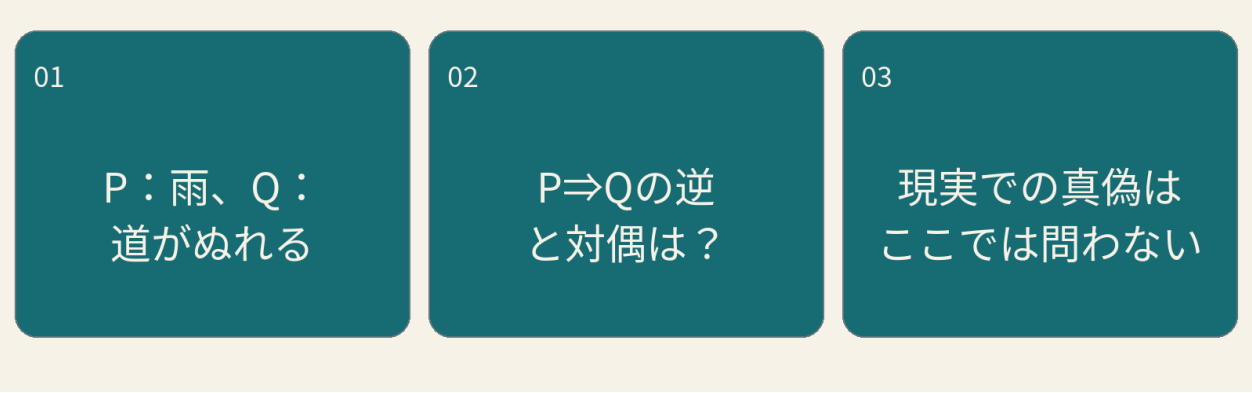
問題 2

整数nについて『n^2が偶数⇒nが偶数』を対偶で示そう。nは整数。n^2が偶数 ⇒ nが偶数。対偶を使って示せる？



問題 3

P：雨、Q：道がぬれる。P⇒Qの逆と対偶は？。現実での真偽はここでは問わない。文の形だけを対応させる



解答と理由

対偶による証明

問題 1 の解答

対偶が元の命題と同じ真偽になることを使って示せます。逆とは区別します。

整数nについて「n^2が偶数ならnが偶数」の対偶は「nが奇数ならn^2が奇数」です。n=2k+1を2乗すると奇数になり、対偶から元の命題が分かります。

P	Q	P⇒Q	¬Q⇒¬P	Q⇒P
偽	偽	真	真	真
偽	真	真	真	偽
真	偽	偽	偽	真
真	真	真	真	真

元の命題と対偶は全行一致

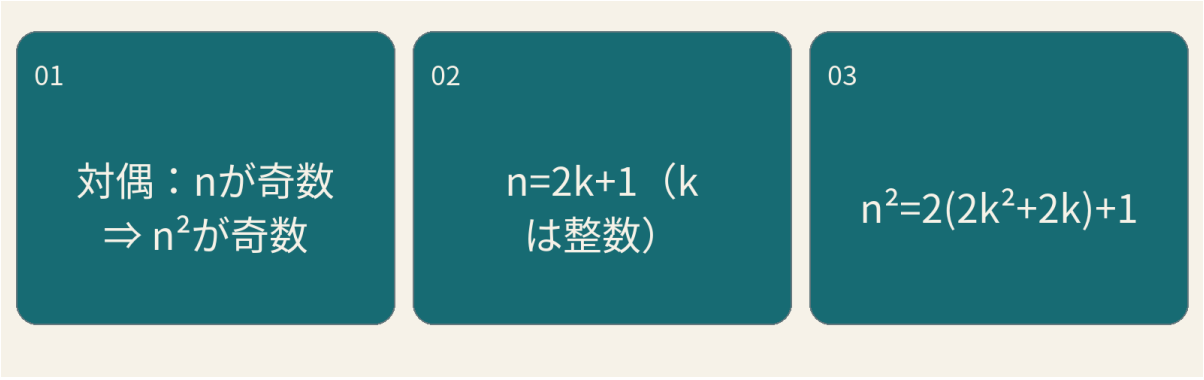
逆とは全行一致しない

有限代入ではなく論理形を確認

問題 2 の解答

対偶：nが奇数 ⇒ n^2が奇数。n=2k+1（kは整数）。$n^2=2(2k^2+2k)+1$。任意の整数kで成り立つ展開

対偶：nが奇数 ⇒ n^2が奇数。n=2k+1（kは整数）。$n^2=2(2k^2+2k)+1$。任意の整数kで成り立つ展開



問題 3 の解答

逆は「道がぬれるなら雨」、対偶は「道がぬれないなら雨ではない」です。

P⇒Qの逆はQ⇒P、対偶は¬Q⇒¬Pです。文の順序と否定の対応を確認します。ここでは現実の雨や道路について真偽を判定する問題には広げません。 対偶は元の命題と同値ですが、逆は一般には同値ではありません。

対偶と逆

P⇒Qの対偶は「Qでない⇒Pでない」で、元と真偽が同じです。単に矢印を逆にしたQ⇒Pとは区別します。否定の範囲も弱めません。

整数の偶奇で確かめる

整数nは偶数か奇数です。nが奇数ならn=2k+1と書け、$n^2=4k^2+4k+1$も奇数です。これが「n^2が偶数⇒nが偶数」の対偶を示します。

要点と解説をつなぐ

対偶による証明

例と一般の証明

いくつかの整数を代入する確認は補助であり、すべての整数の証明の代わりにはなりません。一般の整数kで式を表すことと、真理値表の照合を区別します。

同値が保証するもの

対偶と元の命題は真偽が対応しますが、逆まで自動的に保証されるわけではありません。日常語でも条件と結論、双方の否定を正しく対応させます。

使える形を選ぶ

直接示しにくいとき、結論の否定から仮定の否定へ進む形を選びます。対象は整数で、実数一般へ偶奇の議論を広げません。

固定する条件の確認

n,kは整数。。否定と矢印の向きの両方を変えて対偶を作る。

P	Q	P⇒Q	¬Q⇒¬P	Q⇒P
偽	偽	真	真	真
偽	真	真	真	偽
真	偽	偽	偽	真
真	真	真	真	真

元の命題と対偶は全行一致

逆とは全行一致しない

有限代入ではなく論理形を確認