

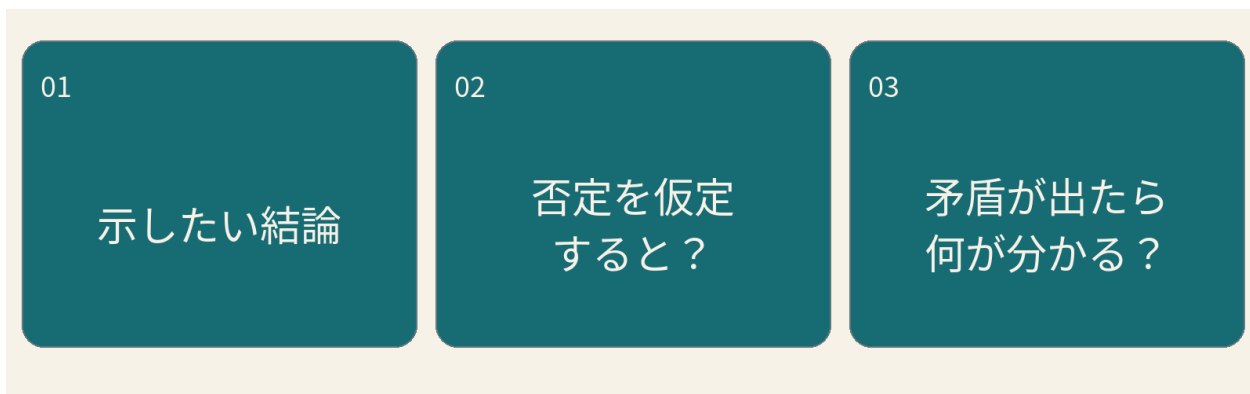
問いと図で確かめる

背理法

条件と数値は図・表示の記録にそろえています。問題、解答、続く理由を対応させて確かめます。

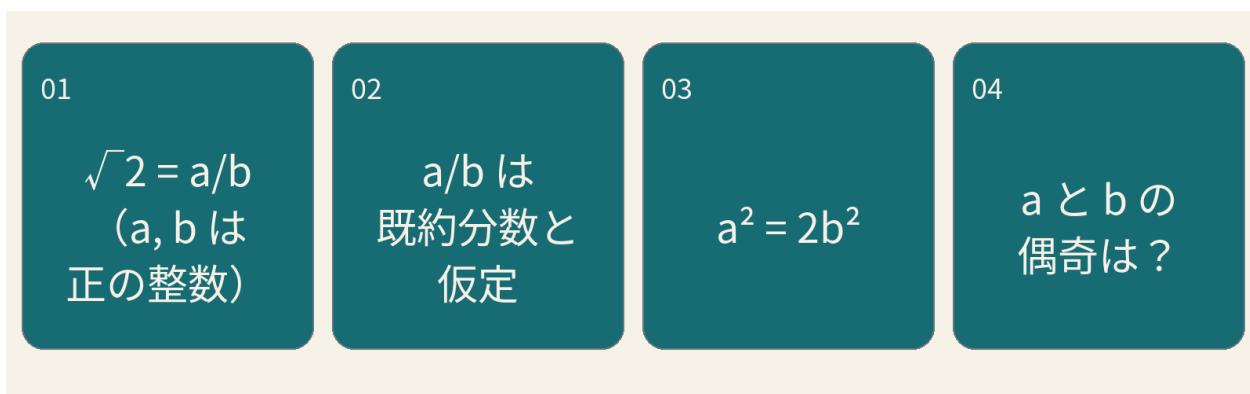
問題 1

結論を否定して矛盾したら何が分かる？。示したい結論。否定を仮定すると？。矛盾が出たら何が分かる？



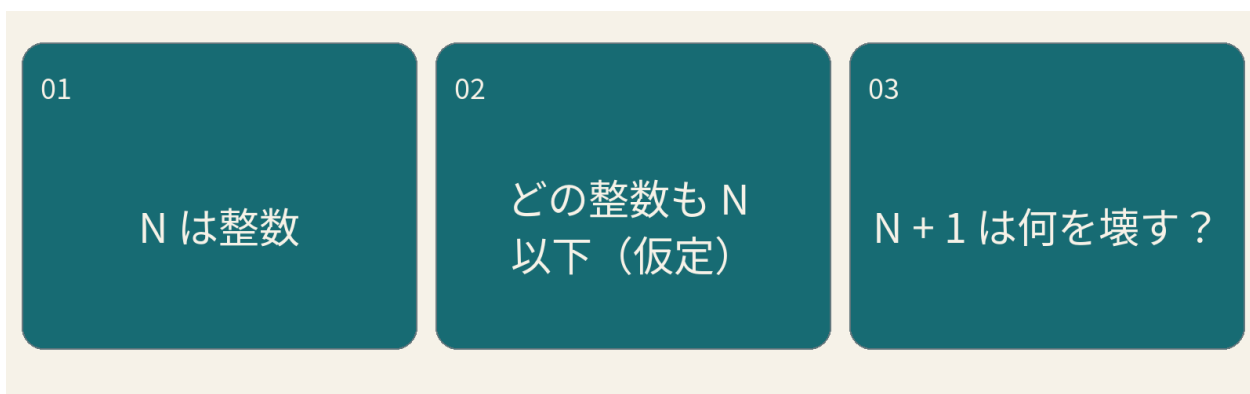
問題 2

$\sqrt{2}=a/b$ （既約）と仮定し、 a, b の偶奇の矛盾を探そう。 $\sqrt{2}=a/b$ （ a, b は正の整数）。 a/b は既約分数と仮定。 $a^2=2b^2$ 。 a と b の偶奇は？



問題 3

最大の整数 N があると仮定すると $N+1$ は何を壊す？。 N は整数。どの整数も N 以下（仮定）。 $N+1$ は何を壊す？



解答と理由

背理法

問題 1 の解答

結論の否定から正しい推論で矛盾が出れば、否定の仮定が偽で元の結論が真と分かります。

$\sqrt{2}=a/b$ を既約分数と仮定すると $a^2=2b^2$ から a は偶数となり、代入して b も偶数になります。分子分母がともに偶数なのは既約と矛盾します。

段階	内容
仮定	$\sqrt{2} = a/b$ (既約)
二乗	$a^2 = 2b^2$
偶奇	$a = 2c, b^2 = 2c^2$
矛盾	a, b とも偶数 $\leftrightarrow$ 既約

矛盾した命題：既約 と 共に偶数

→ 仮定「 $\sqrt{2}$ は有理数」が偽

問題 2 の解答

a^2 が偶数 $\Rightarrow a$ は偶数。 $a = 2c \Rightarrow b^2 = 2c^2$ 。 b も偶数。 a, b が公約数 2 $\rightarrow$ 既約に矛盾。 矛盾の相手は「既約」という仮定

a^2 が偶数 $\Rightarrow a$ は偶数。 $a = 2c \Rightarrow b^2 = 2c^2$ 。 b も偶数。 a, b が公約数 2 $\rightarrow$ 既約に矛盾。 矛盾の相手は「既約」という仮定

01

a^2 が偶数
 $\Rightarrow a$ は偶数

02

$a = 2c \Rightarrow$
 $b^2 = 2c^2$

03

b も偶数

04

a, b が公約数
2 $\rightarrow$ 既約に
矛盾

問題 3 の解答

$N+1$ は整数。 $N+1 > N$ 。 「どの整数も N 以下」に矛盾。 $\rightarrow$ 最大の整数はない。 矛盾した命題を明示

$N+1$ は整数。 $N+1 > N$ 。 「どの整数も N 以下」に矛盾。 $\rightarrow$ 最大の整数はない。 矛盾した命題を明示

01

$N+1$ は整数

02

$N+1 > N$

03

「どの整数
も N 以下」
に矛盾

04

$\rightarrow$ 最大の
整数はない

要点と解説をつなぐ

背理法

背理法の手順

背理法の手順。示したい命題 P。「Pでない」と仮定。正しい推論を重ねる。矛盾 $\rightarrow$ 仮定が偽 $\rightarrow$ P が真。背理法の流れ

矛盾の原因は仮定にある

矛盾の原因は仮定にある。各段階の推論は正しい。矛盾の原因は仮定だけ。何と何が食い違ったかを書く。矛盾した命題を明示する

言葉の定義

言葉の定義。 $\sqrt{2}$ ：二乗して2になる正の数。有理数：整数の比で書ける数。既約分数：分子と分母の公約数が1だけ。使う言葉を先に決める

いつでも既約にできる

いつでも既約にできる。 $6/4 \rightarrow 3/2$ 。公約数で割り続ける。正の有理数は必ず既約分数で書ける。約分は必ず終わる

否定を仮定する

否定を仮定する。示したい： $\sqrt{2}$ は有理数ではない。仮定： $\sqrt{2}$ は有理数。 $\sqrt{2} = a/b$ (a, b は正の整数)。 a/b は既約分数。否定を仮定に置く

二乗して分母を払う

二乗して分母を払う。 $2 = a^2/b^2$ 。 $a^2 = 2b^2$ 。 a^2 は偶数。ここまでは正しい式変形

使ってよい事実

使ってよい事実。 a^2 が偶数 $\Rightarrow a$ が偶数。前回の対偶で証明済み。新しい仮定を足さない。推論の材料を確認する

何と何が矛盾したか

何と何が矛盾したか。矛盾した命題：既約 と 共に偶数。 $\rightarrow$ 仮定「 $\sqrt{2}$ は有理数」が偽。推論の各段階

既約の条件が鍵

既約の条件が鍵。既約の条件なし $\rightarrow 6/4$ のような分数もある。既約の条件あり $\rightarrow$ 共に偶数は矛盾。仮定の置き方で矛盾が生まれる

数値実験は証明ではない

数値実験は証明ではない。 $b = 1 \sim 1000$ で $a^2 = 2b^2$ の解なし。それでも 1001 以上は未確認。全ての整数を示すのは証明。有限の確認は補助

要点と解説をつなぐ

背理法

否定を狭くしない

否定を狭くしない。否定： $\sqrt{2}$ は有理数。× $\sqrt{2}$ は整数（狭すぎる）。分数の場合が抜け落ちる。
否定は全ての場合を覆う

対偶との違い

対偶との違い。対偶：決まった形の命題を示す。背理法：否定を仮定し矛盾を導く。今回の矛盾の相手は「既約」。二つの証明法を区別する

もう一つの例

もう一つの例。示したい：最大の整数はない。仮定：最大の整数 N がある。 N は整数、どの整数も N 以下。否定を仮定に置く

答案の書き方

答案の書き方。1. 何の否定を仮定するか。2. 正しい推論で何を導いたか。3. 何と矛盾したか。→ 元の命題が真。背理法の答案の型

固定する条件の確認

a, b は正の整数、 a/b は既約。。有限の候補を探して見つからないことだけを証明にしない。

段階	内容
仮定	$\sqrt{2} = a/b$ (既約)
二乗	$a^2 = 2b^2$
偶奇	$a = 2c, b^2 = 2c^2$
矛盾	a, b とも偶数 $\leftrightarrow$ 既約

矛盾した命題：既約 と 共に偶数

→ 仮定「 $\sqrt{2}$ は有理数」が偽